

Uvod u modeliranje i simulaciju



Modeliranje

Modeliranje je proces analize stvarnih problema te kreiranja matematičke reprezentacije u svrhu predviđanja ponašanja određenog sustava.

1. analiza problema (identifikacija problema u svrhu kreiranja matematičkog modela, klasifikacija: deterministički ili stohastički problem);
2. formuliranje problema (skupljanje podataka o ponašanju sustava, ispitivanje pretpostavki koje bi pojednostavnile problem, određivanje varijabli i mjernih jedinica, odgonetavanja odnosa među varijablama i podmodelima, definiranje funkcija i jednažbi);
3. rješavanje problema;
4. testiranje i potvrda točnosti;
5. izvještaj o modelu (analiza okolnosti u kojima je problem riješen, dijagram modela, opis tehnika pri rješavanju problema, rezultati i zaključak o rješenjima koja daje model).

Simulacija

Simulacija je model nekog stvarnog sustava koji dopušta dinamičko izvršavanje i manipulaciju istoga.

Podsjetnik: Newtonovi zakoni

1. Newtonov zakon (princip tromosti ili inercije)

Svako tijelo će ostati u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu sve dok se pod djelovanjem vanjskih sila to stanje ne promijeni.

2. Newtonov zakon

Vremenska promjena količine gibanja proporcionalna je sili i zbiva se u smjeru djelovanja sile.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) \xrightarrow{\text{masa se ne mijenja}} \vec{F} = m\vec{a}$$

3. Newtonov zakon (zakon akcije i reakcije)

Svakom djelovanju (akciji) uvijek je suprotno i jednako protudjelovanje (reakcija). Djelovanja dvaju tijela jednoga na drugo uvijek su jednaka i suprotnog smjera.

Podsjetnik: Gibanje

Gibanje

Gibanje je promjena položaja \vec{r} tijela u odnosu na okolinu.

- Relacije, koje opisuju ovisnost među fizikalnim veličinama, (fizikalni zakoni) ne ovise o izboru koordinatnog sustava, ali iznosi izmjerenih veličina ne moraju biti jednaki u svim sustavima:
 - Mjerimo brzinu automobila sa tla (1. referentni sustav) i mjerimo iz nekog drugog automobila (2. sustav).
 - U oba sustava vrijede isti fizikalni zakoni (npr. $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ i $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$), a fizikalne veličine (npr. brzinu automobila) mjerimo u odnosu na naš referentni sustav pa dobivamo najčešće različite vrijednosti.

Akceleracija

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$v(t_P) \approx \frac{x_K - x_P}{t_K - t_P} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v} \quad (\text{ako je sekanta približno tangenta})$$

Brzina

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$a(t_P) \approx \frac{v_K - v_P}{t_K - t_P} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \bar{a} \quad (\text{ako je sekanta približno tangenta})$$

Podsjetnik: Gibanje – jednoliko ubrzano gibanje

- Specijalno, ako na tijelo nepromjenjive mase djeluje sila koja se ne mijenja u vremenu, akceleracija $\vec{a}(t) = \overline{\text{const}} \equiv \vec{a}$ pa vrijedi:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt$$

$$\int_{t'=0}^{t'=t} d\vec{v}(t') = \int_{t'=0}^{t'=t} \vec{a}(t') dt'$$

$$\int_{t'=0}^{t'=t} d\vec{v}(t') = \vec{a} \int_{t'=0}^{t'=t} dt'$$

$$\vec{v}(t') \Big|_{t'=0}^{t'=t} = \vec{a} t' \Big|_{t'=0}^{t'=t}$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \vec{a} \cdot t - 0$$

$$\vec{v}(t) = \vec{a} \cdot t + \vec{v}(0)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\int_{t'=0}^{t'=t} d\vec{r}(t') = \int_{t'=0}^{t'=t} \vec{v}(t') dt'$$

$$\int_{t'=0}^{t'=t} d\vec{r}(t') = \int_{t'=0}^{t'=t} [\vec{a} \cdot t' + \vec{v}(0)] dt'$$

$$\vec{r}(t') \Big|_{t'=0}^{t'=t} = \left[\frac{1}{2} \vec{a} t'^2 + \vec{v}(0) \cdot t' \right] \Big|_{t'=0}^{t'=t}$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \frac{1}{2} \vec{a} t^2 + \vec{v}(0) \cdot t - 0$$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2 + \vec{v}(0) \cdot t + \vec{r}(0)$$

Modeliranje gibanja

Translacijsko gibanje tijela nepromjenjive mase m možemo simulirati na sljedeći način:

1. Proizvoljno postavimo koordinatni sustav.
2. Odredimo sve sile koje djeluju na tijelo.
3. Rastavimo sve vektorske veličine na komponente i izračunamo njihove početne vrijednosti.
4. Odaberemo dovoljno mali vremenski interval Δt tijekom kojeg se akceleracija ne mijenja značajno.
5. Diskretiziramo vremensku skalu $\{t_i = i \cdot \Delta t \mid i = 0, \dots, N\}$ te u trenutcima t_i računamo fizikalne veličine prema sljedećem shematskom prikazu:

Modeliranje gibanja

$x(0)$	$v_x(0)$	$F_x(t)$
$y(0)$	$v_y(0)$	$F_y(t)$
$z(0)$	$v_z(0)$	$F_z(t)$

$t = 0 \text{ s}$

$$a_x(t) = \frac{F_x(t)}{m}$$
$$a_y(t) = \frac{F_y(t)}{m}$$
$$a_z(t) = \frac{F_z(t)}{m}$$

$$x(t + \Delta t) = \frac{1}{2} a_x(t) \cdot (\Delta t)^2 + v_x(t) \cdot \Delta t + x(t)$$
$$y(t + \Delta t) = \frac{1}{2} a_y(t) \cdot (\Delta t)^2 + v_y(t) \cdot \Delta t + y(t)$$
$$z(t + \Delta t) = \frac{1}{2} a_z(t) \cdot (\Delta t)^2 + v_z(t) \cdot \Delta t + z(t)$$
$$v_x(t + \Delta t) = a_x(t) \cdot \Delta t + v(t)_x$$
$$v_y(t + \Delta t) = a_y(t) \cdot \Delta t + v(t)_y$$
$$v_z(t + \Delta t) = a_z(t) \cdot \Delta t + v(t)_z$$

$t = t + \Delta t$

Gibanje padobranca – je li otpor zraka zanemariv?

- Gibanje padobranca

<http://waowen.screaming.net/revision/force&motion/skydiver.htm>

- Sila otpora zraka

$$\vec{F}_{OZ} = -Dv\vec{v}$$

Ako je ρ gustoća zraka, A udarna **površina**, a bezdimenzionalna konstanta C koeficijent otpora; D iznosi

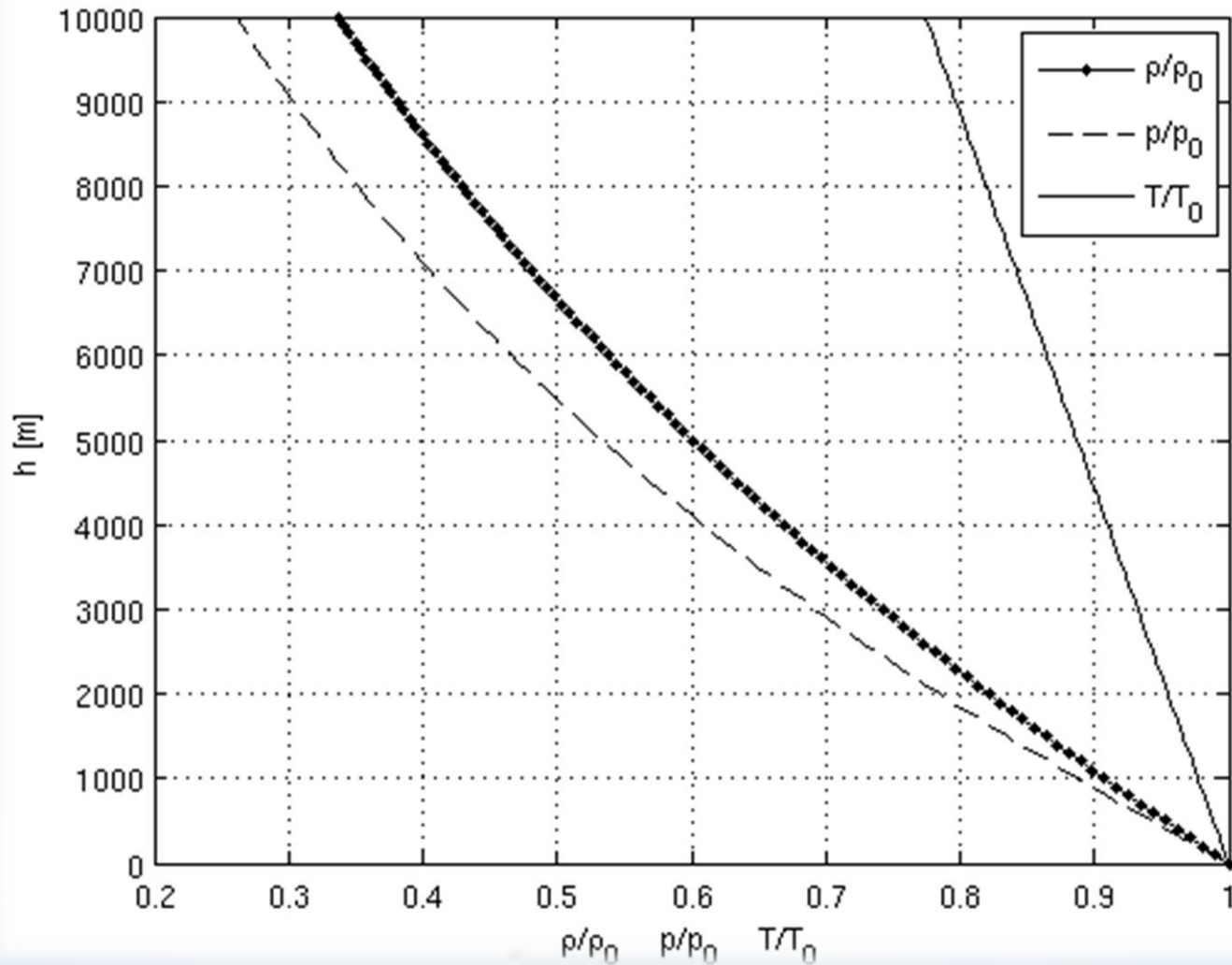
$$D = \frac{\rho CA}{2}$$

- Sila teža

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

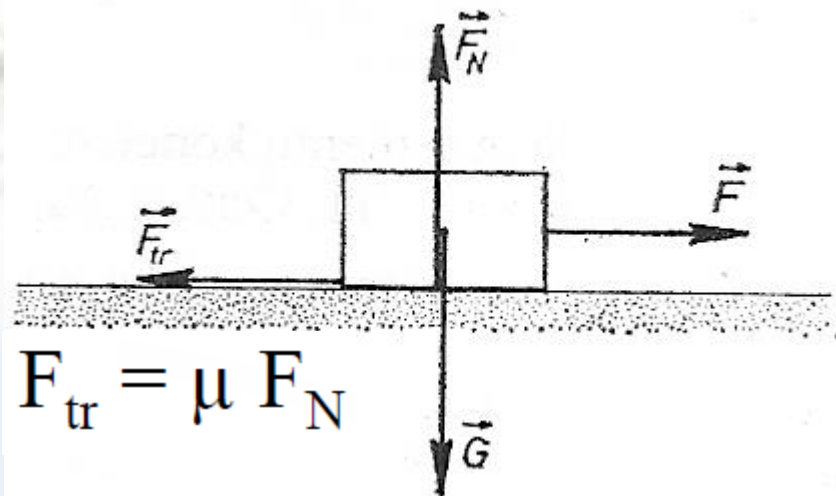
Gibanje padobranca - aproksimacije

- Ostale promjenjive velične poput gustoće zraka s visinom



Trenje

- Otpor koji se javlja između površina nalijeganja dvaju tijela i suprotstavlja se međusobnom gibanju bilo klizanju, kotrljanju ili valjanju (dinamičko trenje) ili onemogućuje gibanje (statičko trenje, veće od dinamičkog).
- Hrapavost podloge.
- Koeficijent trenja.
- Štetno, korisno.



Faktor trenja

- Različit za različite dodirne površine i različite oblike gibanja

dodirne površine	faktor trenja mirovanja	faktor trenja klizanja	faktor trenja kotrljanja
drvo na drvu	0.5	0.3	0.05
čelik na čeliku	0.7	0.5	0.003
guma na suhom asfaltu	0.8	0.6	0.01
guma na mokrom asfaltu	0.3	0.2	0.005
guma na ledu	0.02	0.01	

Gibanje automobila – jesu li zanemarive sile otpora

2.1. Automobil mase 1500 kg giba se po ravnoj suhoj podlozi brzinom 10 m/s. Provjerite kako sila trenja i otpor zraka utječu na:

- prevaljeni put i brzinu tijekom 150 s ako vučna sila automobila iznosi 2000 N;
- zaustavni put automobila ako kotači kližu po suhom asfaltu (vučna sila iznosi 0 N);
- zaustavni put automobila ako se kotači kotrljaju po suhom asfaltu (vučna sila iznosi 0 N).

RJ: a) Za provjeru utjecaja potrebno je napraviti simulaciju sa i bez F_{tr} i F_{oz}

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$F_v = 2000 \text{ kg m/s}^2$$

$$a = F/m$$

$$\mu = 0.01$$

$$C = 0.4$$

$$F_{oz} = - D v |v|$$

$$dv/dt = a$$

$$v(0) = 10 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$$

$$F_{tr} = - \mu m g v / |v|$$

$$dx/dt = v$$

$$x(0) = 0 \text{ m}$$

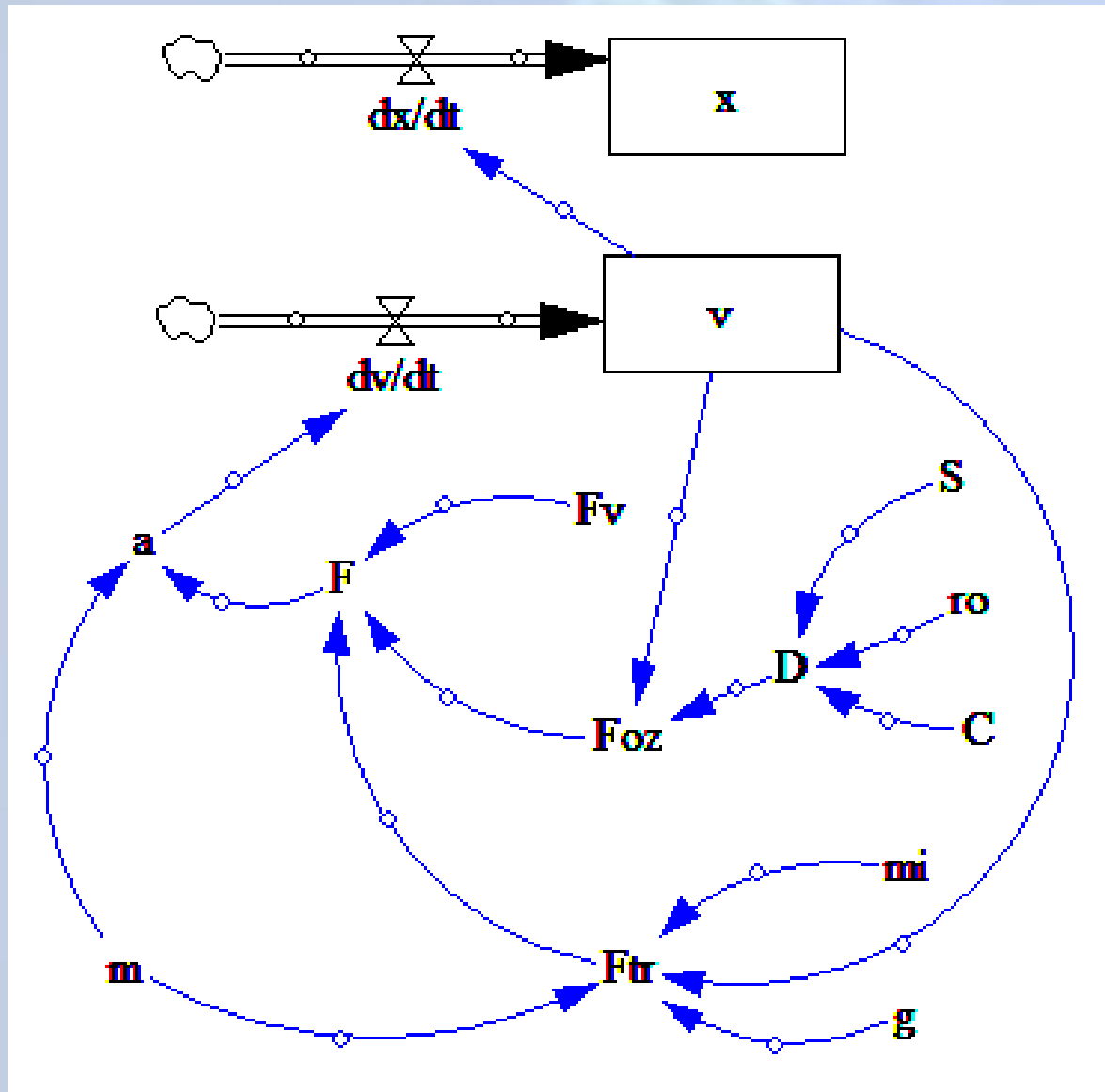
$$m = 1500 \text{ kg}$$

$$F = F_v + F_{oz} + F_{tr}$$

$S \approx 3 \text{ m}^2$ (površina, oznaka A u formuli za $D = \rho C A / 2 = \rho C S / 2$)

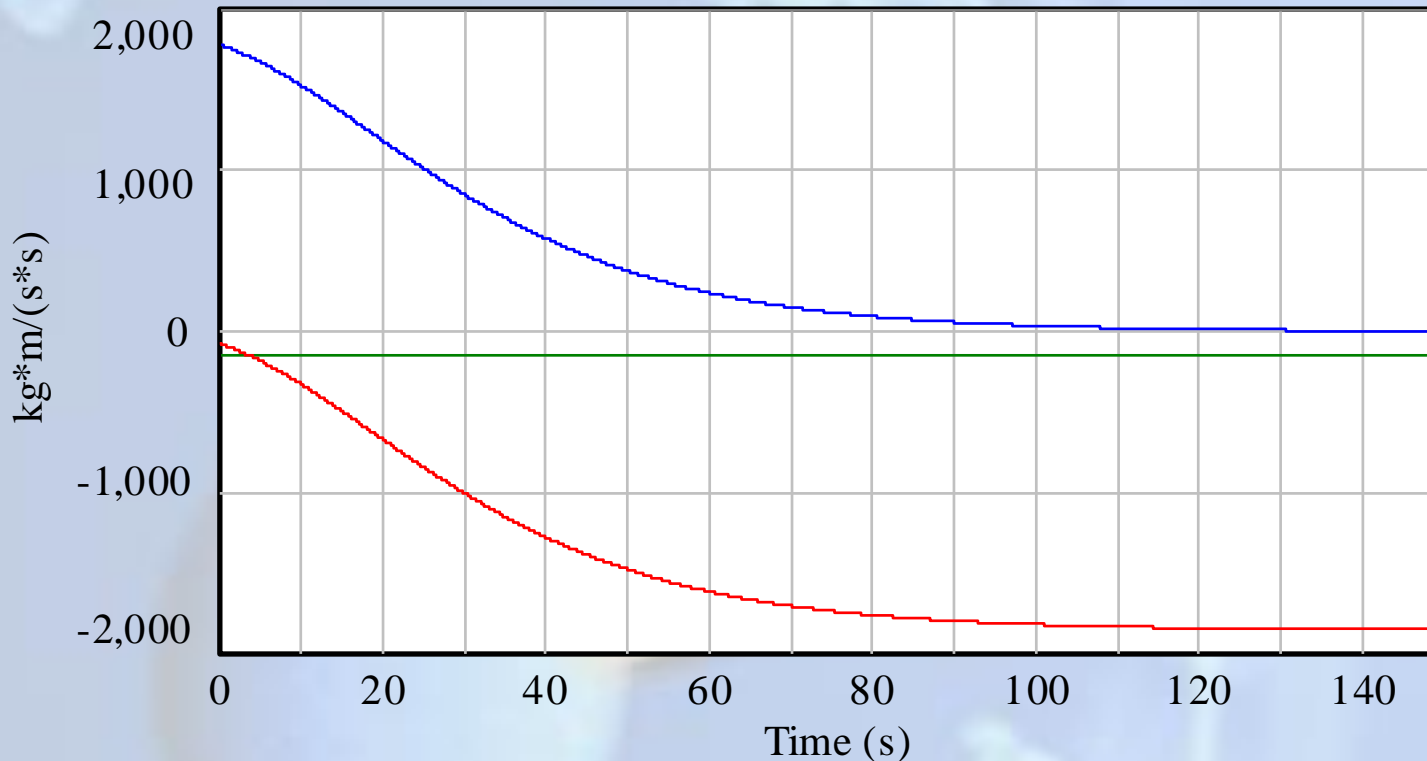
Model: Automobil_provjera.mdl

Vensim test rezultata



V10 – usporedba sila

Selected Variables



F : Current

Ftr : Current

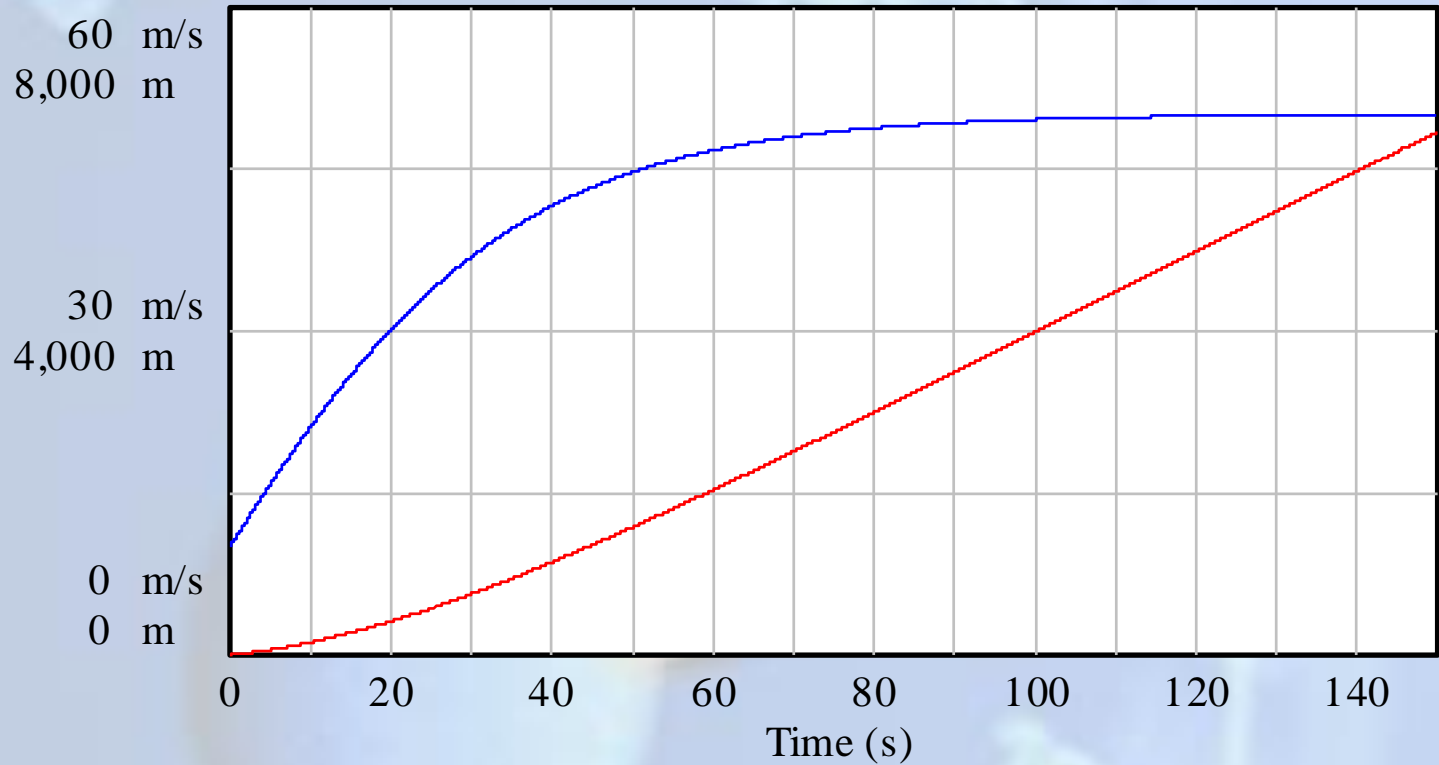
Foz : Current

Fv : Current

- ✓ sila trenja **Ftr** konstanta je jer se automobil stalno giba po istoj podlozi pa je isti koeficijent trenja μ , a stalno je ista i sila reakcije podloge = **G** = mg
- ✓ sila otpora zraka **Foz** povećava se kvadratno s povećanjem brzine dok ukupna sila **F** na automobil ne postane 0 (sve dok automobil ubrzava)

V10 – a)

Selected Variables

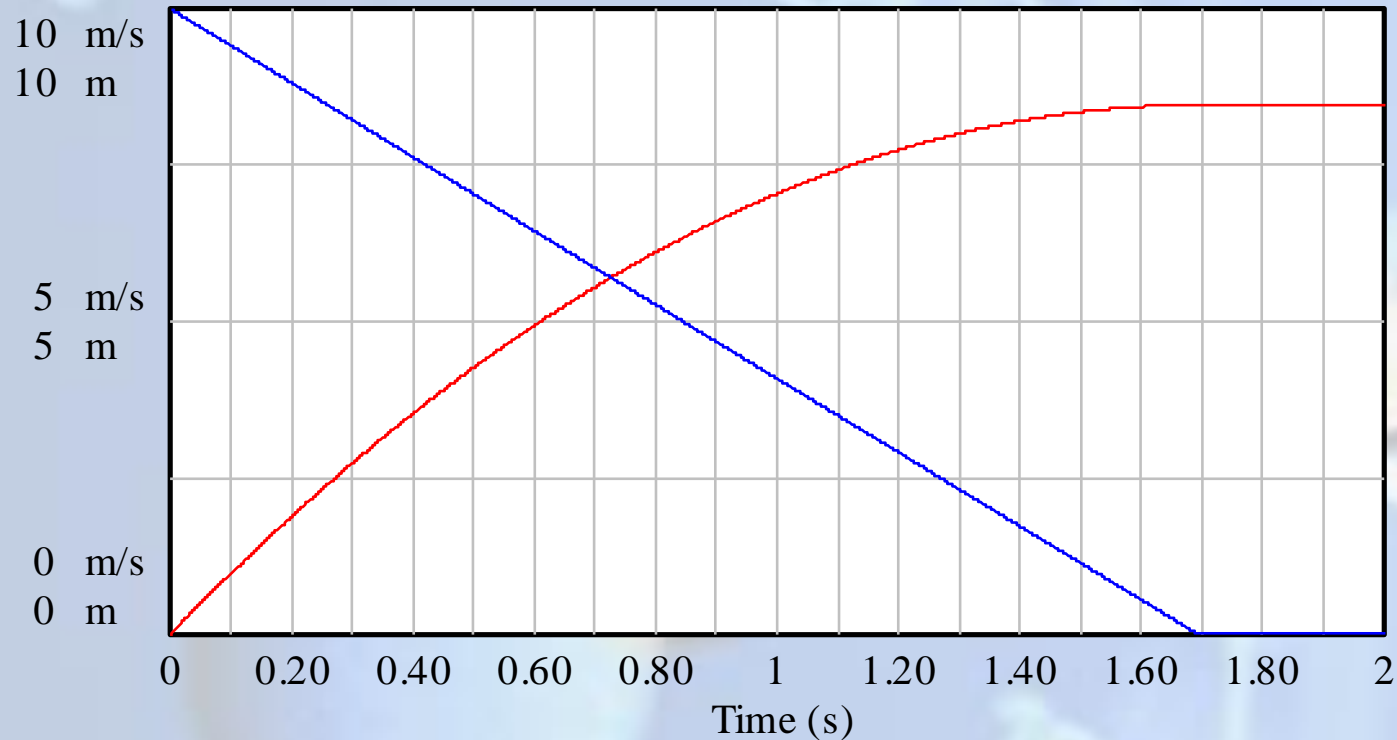


v : Current ————— m/s
x : Current ————— m

✓ automobil ubrzava sve dok ukupna sila \mathbf{F} na automobile ne postane 0, dok zbroj sila otpora zraka i trenja ne postane jednakog iznosa kao vučna sila

V10 - b) $\mu = 0.6$

Selected Variables

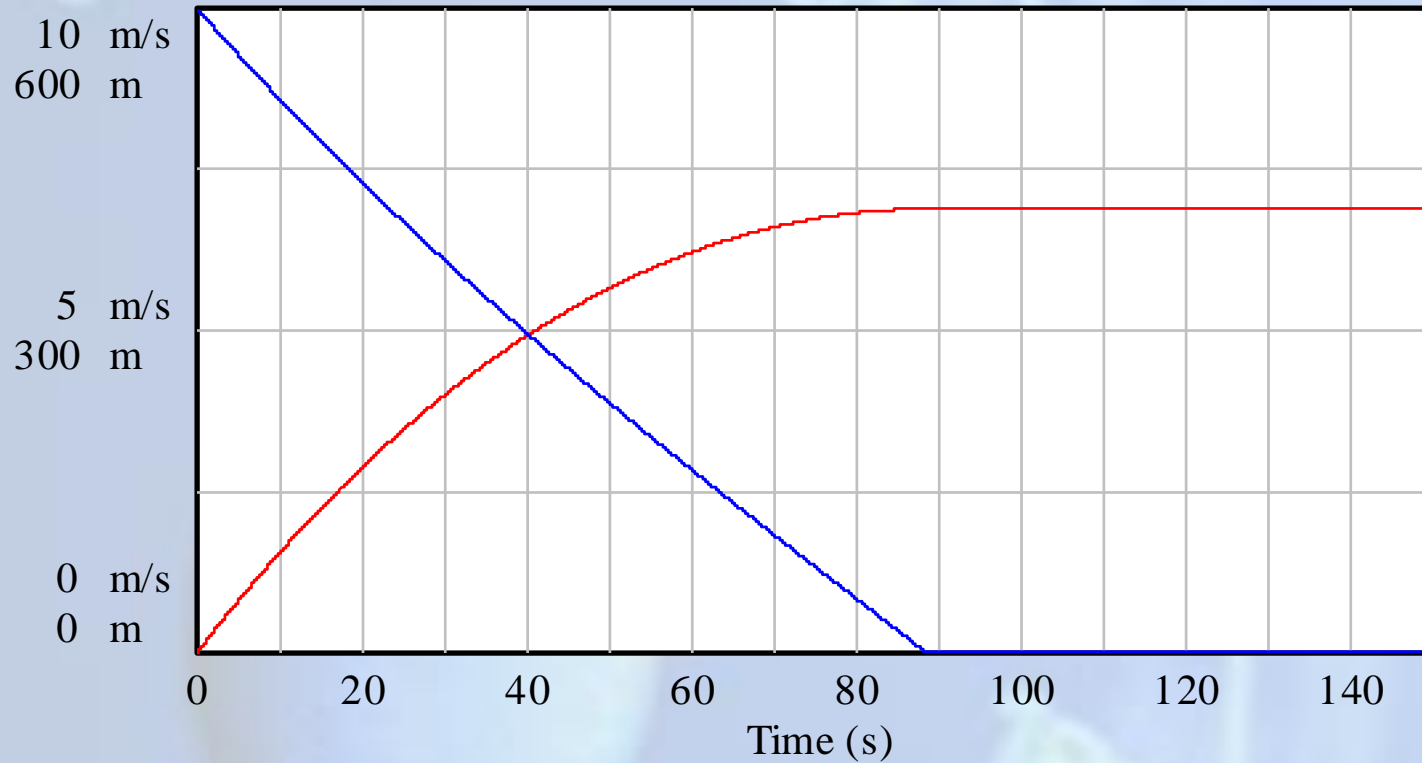


v: Current ————— m/s
x: Current ————— m

✓ automobil se zaustavi nakon približno 1.7 s, odnosno **8.5 m** (pročitano iz tabličnih podataka za $dt=0.001s$)

V10 - c) $\mu = 0.01$

Selected Variables



v : Current ————— m/s

x : Current ————— m

✓ automobil se zaustavi nakon 88.5 s, odnosno **413 m** (pročitano iz tabličnih podataka za $dt=0.02s$)